ماتریس زیر رو در نظر بگیرید،فرم نمایی ماتریس (e^{At}) رو با سه روش به دست بیارید.

- **روش تبدیلات همانندی (فرم های قطری و جردن).**
- **روش لاپلاس معکوس.**
- **روش کیلی همیلتون.**

$$A=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

۱) روش تبدیلات همانندی (فرم قطری و جردن).

{مقادیر ویژه رو به دست بیارید،ماتریس بالا مثلثیه پس مقادیر ویژه همون مقادیر روی قطر اصلی ماتریس خواهد بود}

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=2\\\lambda_3=3\end{cases}$$

{ماتریس همانندی رو تشکیل میدیم،مقادیر ویژه تکراری نیستن پس فرم ماتریس قطری خواهد بود و مقادیر ویژه روی قطر اصلی خواهد نشست}

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

{حالا فرم نمایی ماتریس همانندی رو به دست میاریم،برای انجام اینکار کافیه عدد روی قطر اصلی رو به جای $\hat{A}$ در تابع $e^{\hat{A}t}$ قرار بدیم ودرون ماتریس بزاریم}

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\rightarrow e^{\hat{A}t}=\begin{bmatrix}e^{t}&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$$

{از طریق فرمول $e^{At}=Qe^{At}Q^{-1}$ فرم نمایی ماتریس رو به دست میاریم،با توجه به فرمول باید ماتریس تبدیل کننده به فرم قطری (Q) رو به دست بیاریم،ماتریس Q از ترکیب بردارهای ویژه ماتریس A به دست میاد پس اول باید بردارهای ویژه رو تعیین کنیم}

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=2\\\lambda_3=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(A-\lambda_1 I)v_1=0\rightarrow\left(\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\\(A-\lambda_2 I)v_2=0\rightarrow\left(\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\\(A-\lambda_3 I)v_3=0\rightarrow\left(\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\end{cases}$$

{به جای علامت سوال تو بردارها باید اعداد بزاریم که،وقتی که ماتریس در اون بردار ضرب شد جواب صفر بشه}

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$\rightarrow\begin{cases}(A-\lambda_1 I)v_1=0\rightarrow\begin{bmatrix}0&4&10\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\(A-\lambda_2 I)v_2=0\rightarrow\begin{bmatrix}-1&4&10\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\rightarrow v_2=\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}\\(A-\lambda_3 I)v_3=0\rightarrow\begin{bmatrix}-2&4&10\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=0\rightarrow v_1=\begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\rightarrow Q=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

{معکوس ماتریس Q رو به دست میاریم}

$$\det(Q)=(1)\big((1)(1)-(0)(0)\big)=1$$

$$\sigma(Q)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}\quad adj(Q)=(\sigma(Q))^T$$

$$\rightarrow adj(Q)=\begin{bmatrix}1&-4&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Q^{-1}=\frac{1}{\det(Q)}\times adj(Q)$$

$$\rightarrow Q^{-1}=\frac{1}{1}\times\begin{bmatrix}1&-4&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Q^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

{از طریق فرمول $e^{At}=Qe^{\hat{A}t}Q^{-1}$ فرم نمایی ماتریس رو به دست میاریم}

$$e^{At}=Qe^{\hat{A}t}Q^{-1}\rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&4e^{2t}&5e^{3t}\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&-4e^t+4e^{2t}&-5e^t+5e^{3t}\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$$

۲) روش لاپلاس معکوس.

{با محاسبه لاپلاس معکوس $(SI-A)^{-1}$ به راحتی میتونیم فرم نمایی ماتریس رو به دست بیاریم}

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} \to L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}$$

$$\to L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} S-1 & -4 & -10 \\ 0 & S-2 & 0 \\ 0 & 0 & S-3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}$$

{معکوس ماتریس $(SI-A)$ رو به دست میاریم}

$$\det(Q) = (S-1)\big((S-2)(S-3)-(0)(0)\big)$$

$$\to \det(Q) = (S-1)(S-2)(S-3)$$

$$\sigma(Q) = \begin{bmatrix} (S-2)(S-3) & 0 & 0 \\ 4(S-3) & (S-1)(S-3) & 0 \\ 10(S-2) & 0 & (S-1)(S-2) \end{bmatrix} \quad adj(Q) = (\sigma(Q))^T$$

$$\to adj(Q) = \begin{bmatrix} (S-2)(S-3) & 4(S-3) & 10(S-2) \\ 0 & (S-1)(S-3) & 0 \\ 0 & 0 & (S-1)(S-2) \end{bmatrix}$$

$$\to (SI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(SI-A)} \times adj(SI-A)$$

$$\to (SI-A)^{-1} = \frac{1}{(S-1)(S-2)(S-3)} \times \begin{bmatrix} (S-2)(S-3) & 4(S-3) & 10(S-2) \\ 0 & (S-1)(S-3) & 0 \\ 0 & 0 & (S-1)(S-2) \end{bmatrix}$$

$$\to (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(S-2)(S-3)}{(S-1)(S-2)(S-3)} & \frac{4(S-3)}{(S-1)(S-2)(S-3)} & \frac{10(S-2)}{(S-1)(S-2)(S-3)} \\ 0 & \frac{(S-1)(S-3)}{(S-1)(S-2)(S-3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(S-1)(S-2)}{(S-1)(S-2)(S-3)} \end{bmatrix}$$

{تا حد امکان ساده سازی رو انجام میدیم}

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$\rightarrow (SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{(S-2)(S-3)}{(S-1)(S-2)(S-3)} & \frac{4(S-3)}{(S-1)(S-2)(S-3)} & \frac{10(S-2)}{(S-1)(S-2)(S-3)} \\ 0 & \frac{(S-1)(S-3)}{(S-3)(S-2)(S-3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(S-1)(S-2)}{(S-1)(S-2)(S-3)} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(S-1)} & \frac{4}{(S-1)(S-2)} & \frac{10}{(S-1)(S-3)} \\ 0 & \frac{1}{(S-2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(S-3)} \end{bmatrix}$$

{کسرهایی که نیاز به تجزیه دارن رو به چند کسر کوچک تر تجزیه میکنیم}

$$\rightarrow \frac{-4}{(S-1)(S-2)}=\frac{A}{(S-1)}+\frac{B}{(S-2)}\rightarrow \begin{cases} S-1=0\rightarrow S=1\rightarrow A=\frac{4}{(S-2)}=\frac{4}{(1-2)}=-4 \\ S-2=0\rightarrow S=2\rightarrow B=\frac{4}{(S-1)}=\frac{4}{(2-1)}=4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{4}{(S-1)(S-2)}=\frac{-4}{(S-1)}+\frac{4}{(S-2)}=-\frac{4}{(S-1)}+\frac{4}{(S-2)}$$

$$\rightarrow \frac{5}{(S-1)(S-3)}=\frac{A}{(S-1)}+\frac{B}{(S-3)}\rightarrow \begin{cases} S-1=0\rightarrow S=1\rightarrow A=\frac{10}{(S-3)}=\frac{10}{(1-3)}=-5 \\ S-3=0\rightarrow S=3\rightarrow B=\frac{10}{(S-1)}=\frac{10}{(3-1)}=5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{5}{(S-1)(S-3)}=\frac{-5}{(S-1)}+\frac{5}{(S-3)}=-\frac{5}{(S-1)}+\frac{5}{(S-3)}$$

$$\rightarrow (SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(S-1)} & -\frac{4}{(S-1)}+\frac{4}{(S-2)} & -\frac{5}{(S-1)}+\frac{5}{(S-3)} \\ 0 & \frac{1}{(S-2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(S-3)} \end{bmatrix}$$

{لاپلاس معکوس ماتریس به دست اومده رو حساب میکنیم}

$$\rightarrow L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{(S-1)} & -\frac{4}{(S-1)}+\frac{4}{(S-2)} & -\frac{5}{(S-1)}+\frac{5}{(S-3)} \\ 0 & \frac{1}{(S-2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(S-3)} \end{bmatrix}\right\}$$

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e^{t} & -4e^{t}+4e^{2t} & -5e^{t}+5e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{t} & -4e^{t}+4e^{2t} & -5e^{t}+5e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

۳) روش کیلی همیلتون.

{چون ابعاد ماتریس سه در سه هست،چندجمله ای زیر رو برای این ماتریس تشکیل میدیم طبق این فرمول فرم نمایی ماتریس به دست میاد}

$$e^{At} = h(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

{حالا مقادیر β_0، β_1 وβ_2 رو به دست میاریم که برای اینکار باید ماتریس A رو تو چندجمله ای، به مقدار ویژه تبدیل کنیم }

$$e^{At} = h(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 \rightarrow e^{\lambda t} = h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2$$

{مقادیر ویژه تکراری نیستن،با توجه به اینکه مقادیر ویژه تکراری نیستن و با توجه به اینکه ابعاد ماتریس سه در سه هست یه دستگاه سه معادله و سه مجهول تشکیل میدیم و چندجمله ای رو درونش ،به ازای سه مقدار ویژه به دست میاریم }

$$\rightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2{\lambda_1}^2 \rightarrow e^{\lambda_1 t} = \beta_0 + \beta_1(1) + \beta_2(1)^2 \\ e^{\lambda_2 t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_2 + \beta_2{\lambda_2}^2 \rightarrow e^{\lambda_2 t} = \beta_0 + \beta_1(2) + \beta_2(2)^2 \\ e^{\lambda_3 t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_3 + \beta_2{\lambda_3}^2 \rightarrow e^{\lambda_3 t} = \beta_0 + \beta_1(3) + \beta_2(3)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{t} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 \\ e^{3t} = \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2 \end{cases}$$

{دستگاه رو حل میکنیم تا مقادیر β_0، β_1 وβ_2 به دست بیان،من از روش کرامر حل میکنم دستگاه رو}

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} e^{t} & 1 & 1 \\ e^{2t} & 2 & 4 \\ e^{3t} & 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{e^{t}(6) - e^{2t}(6) + e^{3t}(2)}{2} = \frac{2(3e^{t} - 3e^{2t} + e^{3t})}{2}$$

$$\rightarrow \beta_0 = 3e^{t} - 3e^{2t} + e^{3t}$$

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$\beta_1=\frac{\begin{vmatrix}1&e^t&1\\1&e^{2t}&4\\1&e^{3t}&9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}}=\frac{-e^t(5)+e^{2t}(8)-e^{3t}(3)}{2}=\frac{(-5e^t+8e^{2t}-3e^{3t})}{2}$$

$$\to\beta_1=-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}$$

$$\beta_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1&e^t\\1&2&e^{2t}\\1&3&e^{3t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}}=\frac{e^t(1)-e^{2t}(2)+e^{3t}(1)}{2}=\frac{(e^t-2e^{2t}+e^{3t})}{2}$$

$$\to\beta_2=\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

{مقادیر به دست اومده رو تو چندجمله میزاریم و مقدار ویژه رو به ماتریس A تبدیل میکنیم}

$$e^{\lambda t}=h(\lambda)=(3e^t-3e^{2t}+e^{3t})+(-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t})\lambda+(\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t})\lambda^2$$

$$\to e^{At}=h(A)=(3e^t-3e^{2t}+e^{3t})I+(-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t})A+(\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t})A^2$$

{ماتریس A رو تو رابطه جایگذاری میکنیم و جمع هارو انجام میدیم تا فرم نمایی ماتریس به دست بیاد}

$$\boxed{A^2=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&12&40\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}}$$

$$\to e^{At}=(3e^t-3e^{2t}+e^{3t})\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t})\begin{bmatrix}1&4&10\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}+(\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t})\begin{bmatrix}1&12&40\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\to e^{At}=\begin{bmatrix}3e^t-3e^{2t}+e^{3t}&0&0\\0&3e^t-3e^{2t}+e^{3t}&0\\0&0&3e^t-3e^{2t}+e^{3t}\end{bmatrix}+\cdots$$

$$\cdots\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}&-10e^t+16e^{2t}-6e^{3t}&-25e^t+40e^{2t}-15e^{3t}\\0&-5e^t+8e^{2t}-3e^{3t}&0\\0&0&-\frac{15}{2}e^t+12e^{2t}-\frac{9}{2}e^{3t}\end{bmatrix}+\cdots$$

mohammadhosein.r1378@gmail.com

$$\dots\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t} & 6e^{t}-12e^{2t}+6e^{3t} & 20e^{t}-40e^{2t}+20e^{3t} \\ 0 & 2e^{t}-4e^{2t}+2e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}e^{t}-9e^{2t}+\frac{9}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} 3e^{t}-3e^{2t}+e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{t}-3e^{2t}+e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 3e^{t}-3e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}+\cdots$$

$$\dots\begin{bmatrix} -2e^{t}+3e^{2t}-e^{3t} & -4e^{t}+4e^{2t} & -5e^{t}+5e^{3t} \\ 0 & -3e^{t}+4e^{2t}-e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & -3e^{t}+3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} e^{t} & -4e^{t}+4e^{2t} & -5e^{t}+5e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

موفق باشید.

mohammadhosein.r1378@gmail.com